Coloquio Internacional de GeoGebra en Argentina

22 y 23 de noviembre de 2011

UNA PROPUESTA DIDÁCTICA CON DISTINTOS GRADOS DE PARAMETRIZACIÓN EN ENTORNOS DE GEOMETRÍA DINÁMICA:

EL CASO DE LA CIRCUNFERENCIA DESDE UN ENFOQUE GEOMÉTRICO - ALGEBRAICO EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES

C E D E CENTRO DE ESTUDIOS EN DIDÁCTICAS ESPECÍFICAS

Rosa Ferragina, Leonardo Lupinacci

Centro de Estudios en Didácticas Específicas, (CEDE).
Universidad Nacional de General San Martín (UNSAM).
rosaferragina_1@hotmail.com leolupinacci@yahoo.com.ar

La presente propuesta se encuadra en el marco de un proyecto de investigación cuyo tema de estudio es "*Geometría y TIC: estudio didáctico de propuestas de enseñanza en la escuela secundaria*".

Esta investigación se realiza desde el área Didáctica de la Matemática del CEDE (Centro de Estudios en Didácticas Especificas) perteneciente a la Universidad Nacional de San Martín (UNSAM) en Argentina.

La propuesta se basa en la resolución de problemas que integran cuestiones geométricas y algebraicas, en conjunto con las potencialidades que ofrecen los entornos de geometría dinámica.

INTEGRACIÓN MUCHAS VECES NO LLEVADA A CABO:

No se logra la conjunción de saberes, quedando aparentemente dos bloques separados

Geometría euclidiana

Geometría analítica o de coordenadas, sustentándose en el desarrollo de técnicas algebraicas

Concepción que se traslada a la enseñanza secundaria, donde pareciera existir un acuerdo implícito de reservar para la Secundaria Básica los contenidos de la euclidiana y, para el tramo superior de enseñanza, la analítica, produciendo entonces una discontinuidad entre ambas que no permite mostrar su complementariedad y evolución (Gascón, 2002).

Necesidad de integración Álgebra-Geometría

Software como herramienta facilitadora de un dinamismo integrador

PROPUESTA

PROBLEMA GEOMÉTRICO

PARAMETRIZACIÓN

CAMPO DE PROBLEMAS GEOMÉTRICO-ALGEBRAICOS

A partir de las potencialidades de entornos informáticos dinámicos

Asignando distintos grados de parametrización a los datos de un problema, puede convertirse en un campo de problemas, susceptible al estudio de variaciones e invariantes visuales, sentando las bases intuitivas para justificaciones formales de conjeturas.

Acordamos con lo que expone Gascón (1999) al referirse a una nueva forma de realizar matemática cuando se profundiza en el estudio de las nuevas técnicas que surgen del doble juego impuesto por las letras como “incógnitas” y como “parámetros”.

Un posible ejemplo tomando como base a la circunferencia

Se pretende poner en primer plano

La relación existente entre variables y parámetros que, a veces, queda oculta cuando sólo se realizan procedimientos algebraicos.

La valorización que proporcionan los entornos de geometría dinámica para fortalecer el vínculo variable/parámetro que está presente en los problemas geométrico-algebraicos.

La interacción y la manipulación en tiempo real de las construcciones que dichos entornos ofrecen.

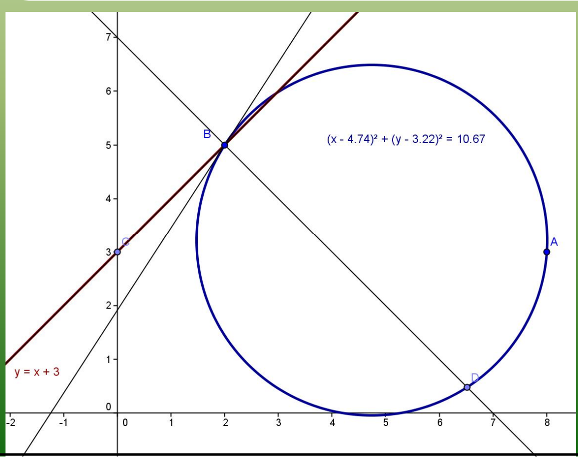
"Obtener las circunferencias que pasan por el punto A (a, b) y son tangentes a la recta y = mx + p en el punto B (c, d)". (Gascón, 2007)

Es posible realizar una primera aproximación al problema mediante la resolución de un caso particular:

"Obtener las circunferencias que pasan por el punto A (8, 3) y son tangentes a la recta y = x + 3 en el punto B (2, 5)".

"Obtener las circunferencias que pasan por el punto A (8, 3) y son tangentes a la recta y = x + 3 en el punto B (2, 5)".

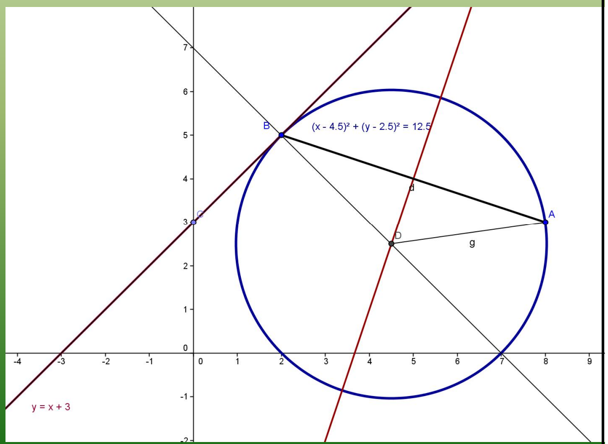
Exploración: circunferencia que pasa por los puntos dados manipulando la posición del tercer punto haciendo coincidir la tangencia solicitada, integrando de este modo elementos de "dibujo" libres con objetos geométricos dependientes.



Recta y = x+3, puntos A y B fijos. Punto D sobre la recta perpendicular a x+3 que pasa por B. Recta e, tangente a la circunferencia. Desplazando el punto D se hace coincidir la recta tangente con x+3 para hallar la ecuación de la circunferencia

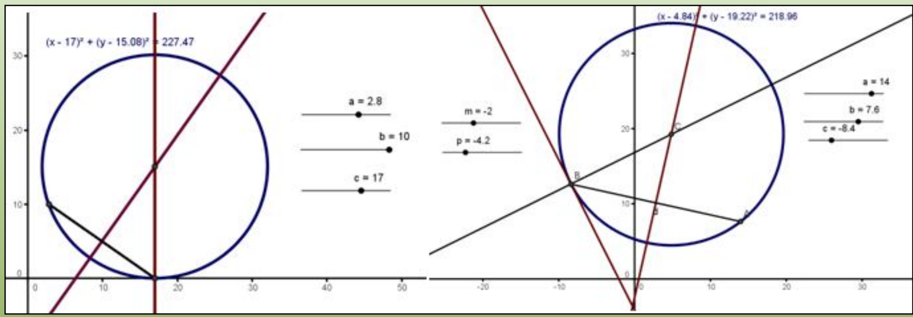
A partir de los análisis anteriores es posible analizar las distintas relaciones y propiedades que cumplen los objetos geométricos manipulados para establecer las características que deben cumplir los objetos puestos en juego.

Construcción análoga a la realización con regla y compás. El centro de la circunferencia se obtiene de la intersección de la mediatriz del segmento (cuerda) AB y de la recta perpendicular a y = x + 3 por el punto B.



Mediante esta construcción se puede explicitar las propiedades geométricas conjeturadas en la etapa anterior, permitiendo entonces comenzar a indagar las condiciones algebraicas que se manifiestan en este caso particular. En este punto se podría retomar técnicas y manipulaciones algebraicas quizás ya conocidas como las condiciones de perpendicularidad, la obtención de la recta que pasa por dos puntos dados, etc.

Por ejemplo, es posible desarrollar este trabajo manteniendo la recta tangente fija y variando la posición de los puntos como se pide en el siguiente enunciado: "*Obtener las circunferencias que pasan por el punto A (a, b) y son tangentes a la recta y = 0 en el punto B (c, 0)*".

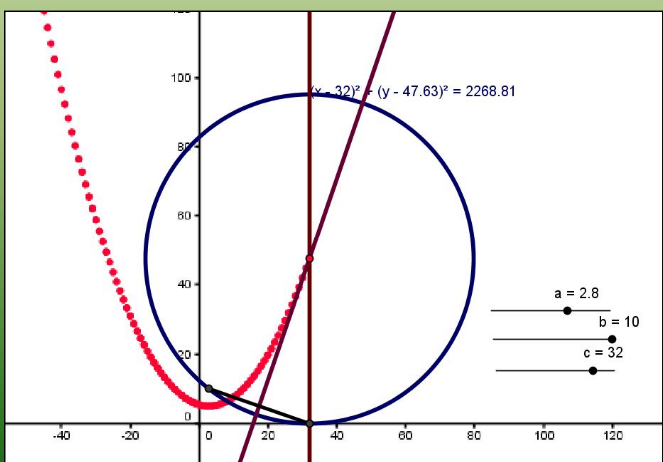


Diferentes niveles de parametrización del enunciado general del problema. A la izquierda partiendo de una recta fija y variando los parámetros de las componentes de los puntos por los que debe pasar la circunferencia. A la derecha variando tanto los puntos como los parámetros de la recta.

Profundizando el estudio

Al variar la posición de los puntos por donde pasa la circunferencia, que el centro de la misma “parece desplazarse de una forma particular”.

Análisis de la influencia de las variaciones de los parámetros en los desplazamientos del centro de la circunferencia: otra “razón de ser” al problema planteado.



Posibilidad de adentrarse en justificaciones formales:

$m = 0$

$A = (a, b)$

$y = p$

$B = (c, p)$

$(a - h)^2 + (b - k)^2 = r^2$

$(c - h)^2 + (p - k)^2 = r^2$

$h = c$

$$\begin{array}{lr} & a^2 - 2ah + h^2 + b^2 - 2bk + k^2 = r^2 \\ - & \\ & P^2 - 2pk + k^2 = r^2 \\ \hline \end{array}$$

$$a^2 - 2ah + h^2 + b^2 - p^2 - 2bk + 2pk = 0$$

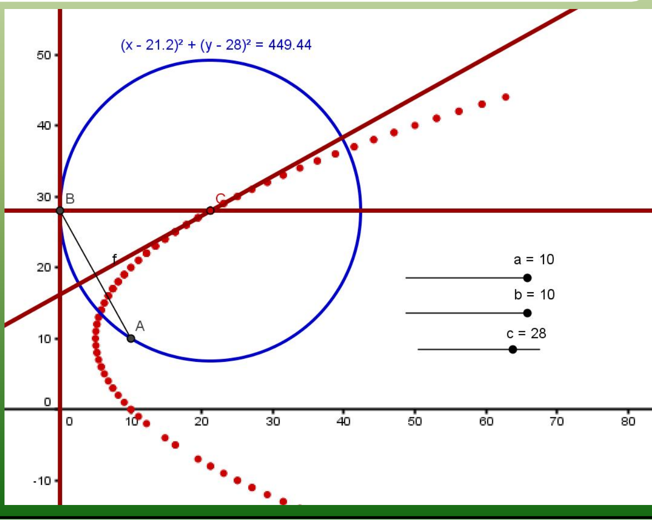
$(h - a)^2 = 2k\,(b - p) + (p^2 - b^2)$

Parábola de eje vertical

Otro caso especial:

"Obtener las circunferencias que pasan por el punto A (a, b) y son tangentes a la recta $x = 0$ en el punto B (0, c)".

Nuevamente el centro de las circunferencias obtenidas al variar los parámetros parecieran determinar una figura particular



Posibilidad de adentrarse en justificaciones formales:

A = (a, b)

B = (c, p)

Recta: x = c

$(a - h)^2 + (b - k)^2 = r^2$

$(c - h)^2 + (p - k)^2 = r^2$

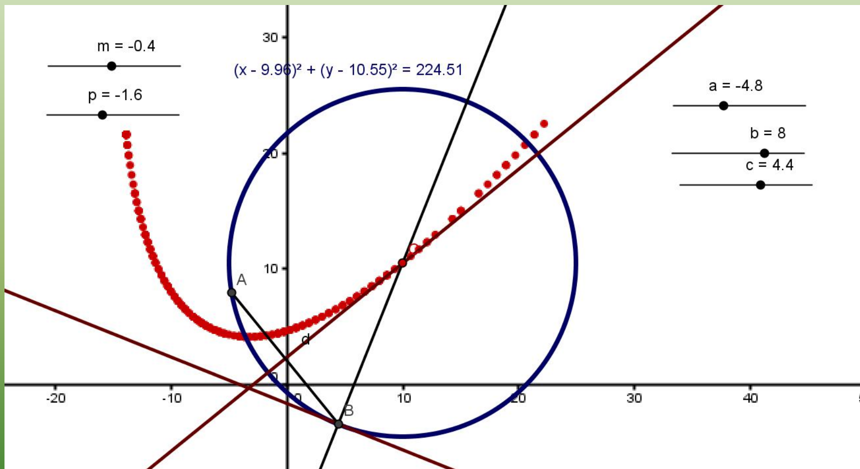
$k = p$

$$\begin{array}{rl} & a^2 - 2ah + h^2 + b^2 - 2bk + k^2 \ = r^2 \\ - & \qquad\qquad\qquad c^2 - 2hc + h^2 \ = r^2 \\ \hline & a^2 - 2ah + k^2 + b^2 - c^2 - 2bk + 2hc = 0 \end{array}$$

$(k - b)^2 = 2h\,(a - c) + (c^2 - a^2)$

Parábola de eje horizontal

Representación del enunciado general:



Conjetura: El lugar geométrico que determina el centro de la circunferencia al variar las coordenadas del punto que se encuentra sobre la recta tangente es una parábola con foco en A y la recta tangente es su directriz.

A modo de cierre

Nos propusimos reflexionar sobre problemas geométricos que pueden evolucionar en un campo de problemas geométrico-algebraicos, tanto por su potencialidad en la exploración como por la elaboración de conjeturas y modelos, en una integración con las herramientas informáticas, y más específicamente de los entornos de geometría dinámica, con las prácticas de enseñanza en las aulas.

Considerando

- modo de explorar las herramientas que ofrece el entrono dinámico
- las características del pensamiento geométrico y en relación a las posibilidades que nos brinda el software
- la decisión de utilizar o no una herramienta (deslizadores, activa trazo, lugar geométrico) para la resolución

Si tenemos un buen problema geométrico "de lápiz y papel", puede serlo aún más cuando se incorpora geometría dinámica.

Otros posibles problemas para el estudio (Gascón 2007):

1. Busca las circunferencias de radio 3 cm. que son tangentes a la recta $\mathbf{4}\boldsymbol{x} + \mathbf{3}\boldsymbol{y} = \mathbf{12}$ en el punto (0, 4).

2. Busca las circunferencias que pasan por el origen de coordenadas y son tangentes a la circunferencia:

$$x^2 + y^2 - 8x - 8y + 28 = 0 \text{ en el punto } (2, 4).$$

3. Busca los rombos que tienen dos vértices consecutivos en los puntos (0, 0) y (2, 3), sabiendo que otro de los vértices está situado sobre el eje de las "*x*".

4. Busca las circunferencias que pasan por los puntos (–1, 0) y (7, 4) y que tienen el centro sobre la circunferencia

$$x^2 + y^2 + 2x - 24 = 0$$

5. Busca las circunferencias que pasan por el punto (4, –2) y son tangentes a los ejes de coordenadas.

6. Busca las circunferencias que pasan por el punto (0, 6) tales que su recta tangente en el punto (6,4) es también recta tangente, en este mismo punto, a la circunferencia de ecuación:

$$x^2 + y^2 - 20x - 14y + 124 = 0$$

7. Busca las circunferencias tangentes a las rectas $3x + 4y = 0$ y $4x + 3y + 1 = 0$ que tengan el centro sobre la recta $x + 2y + 1 = 0$.

Bibliografía

Acosta Gempeler, M. E. (2004). "La Teoría Antropológica de lo Didáctico y las Nuevas Tecnologías". Propuesta de comunicación para el Primer Congreso Internacional de la TAD. Universidad de Jaén.

Acosta Gempeler, M. E. (2005). "Geometría experimental con Cabri: una nueva praxeología matemática", en Revista *Educación Matemática*, diciembre, año 17, vol 3. México. pp 121- 140. Santillana

Dirección General de Cultura y Educación. Provincia de Buenos Aires (1999). *Diseño Curricular del Profesorado de tercer ciclo de la EGB y de la Educación Polimodal en Matemática*.

Gascón, J. (1999). "La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar" en *Educación Matemática* 11/1, 77-88.

Gascón, J. (2002). "Evolución de la controversia entre geometría sintética y geometría analítica. Un punto de vista didáctico matemático" En: *Disertaciones del Seminario de Matemáticas Fundamentales N°28.* Universidad Nacional de Educación a Distancia.

Gascón, J. (2007). *El proceso de algebrización de las matemáticas escolares*. Escuela de invierno de Didáctica de la Matemática, Buenos Aires, Argentina.

Kline, M. (1992*). El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*. Alianza, Madrid.

Santaló L. (1994). *Enfoques. Hacia una didáctica humanista de la Matemática*. Buenos Aires. Troquel Educación.

Santos Trigo, L. (2003). "Procesos de Transformación de Artefactos Tecnológicos en Herramientas de Resolución de Problemas Matemáticos". Boletín de Asociación Matemática Venezolana, Vol. X, Nº 2.